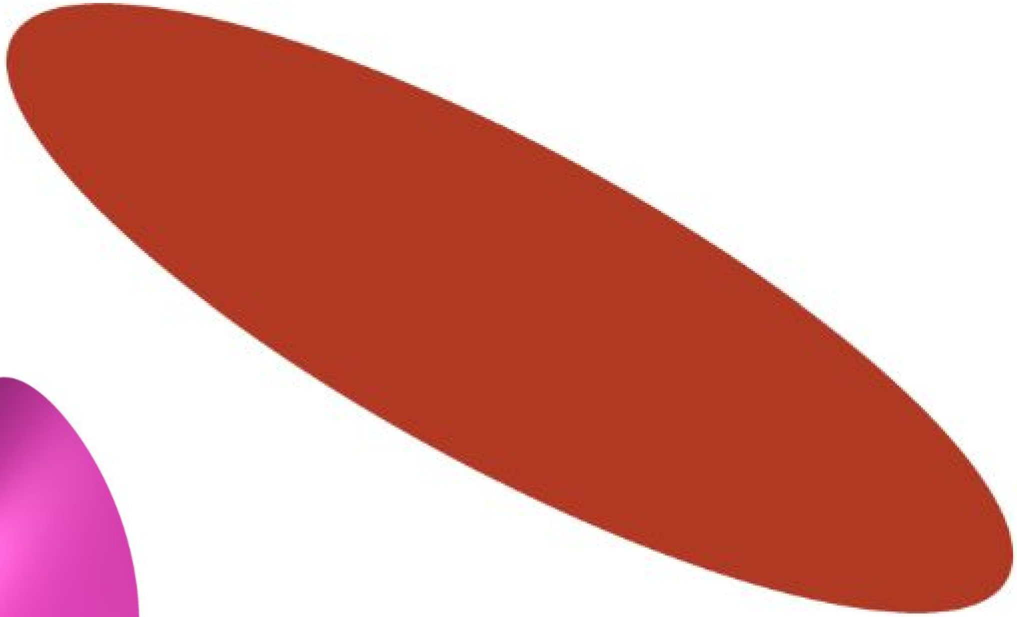
Algebraisk flater

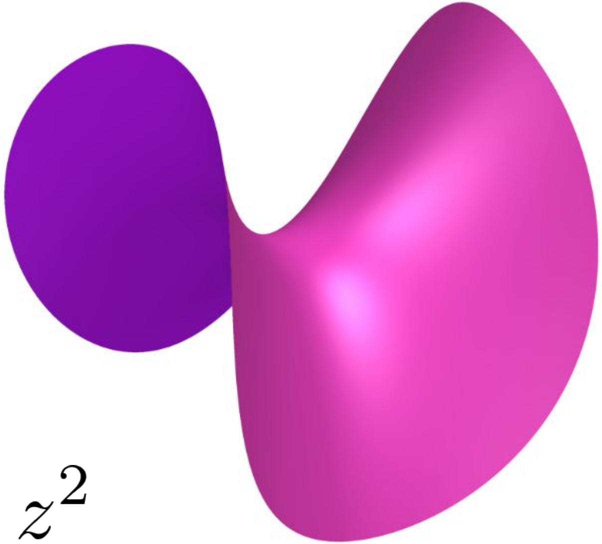
(eller: en liten samling pene bilder)

Fredrik Meyer,
@MatematikkFakta

Hva er en flate?

- Noe to-dimensjonalt.
  - Vandrer du på flaten, har du alltid to retninger å gå i.
- Til høyre er planet gitt ved x = 0.



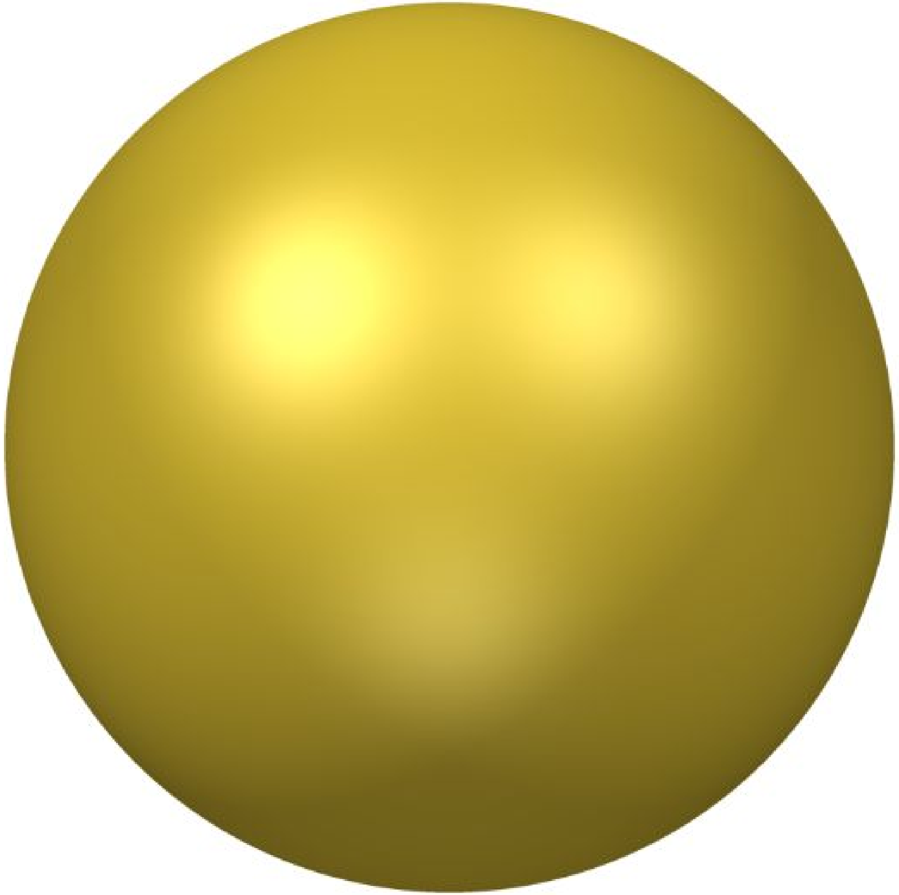


$$y = x^2 - z^2$$

Overflaten til en kule

- Dette er enhetssfæra, som er definert ved ligningen
  $x^2+y^2+z^2 = 1.$
- Eller en smultring:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

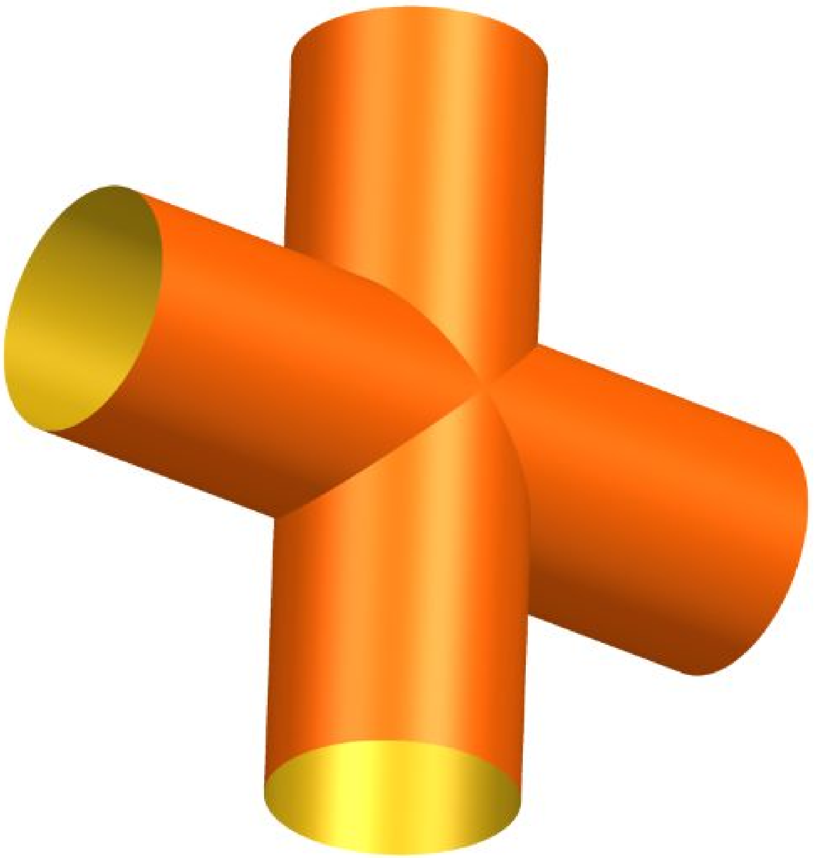


Enter algebra!

- En ***algebraisk flate*** er en flate som er definert av nullpunktene til et polynom i tre variable.
- Vi kan se geometrisk informasjon ut fra algebraen:

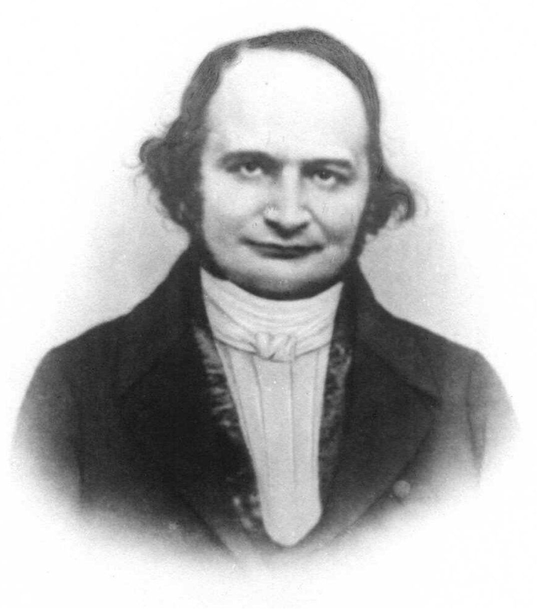
$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + z^2 - 1) = 0$$

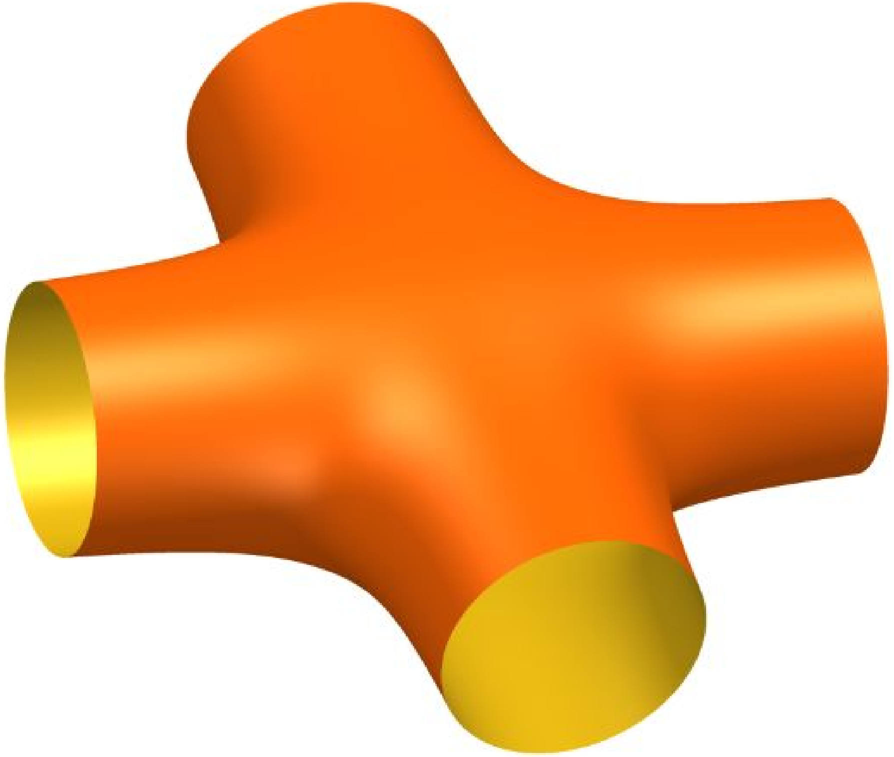
Her faktoriserer polynomet, og da blir flaten en *union* av to sylindre.



Glatt og fin

- Kan gjøre polynomet irredusibelt ved å legge til én på begge sider.

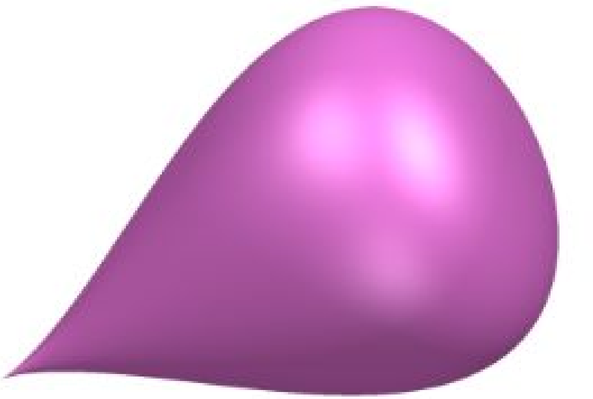




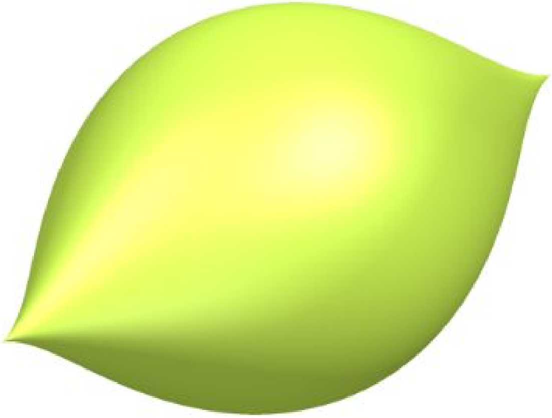
$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + z^2 - 1) = 1$$

Ikke så glatt!

- Her ser vi en *singularitet*.
    - Denne vil du ikke gi en **klem**.

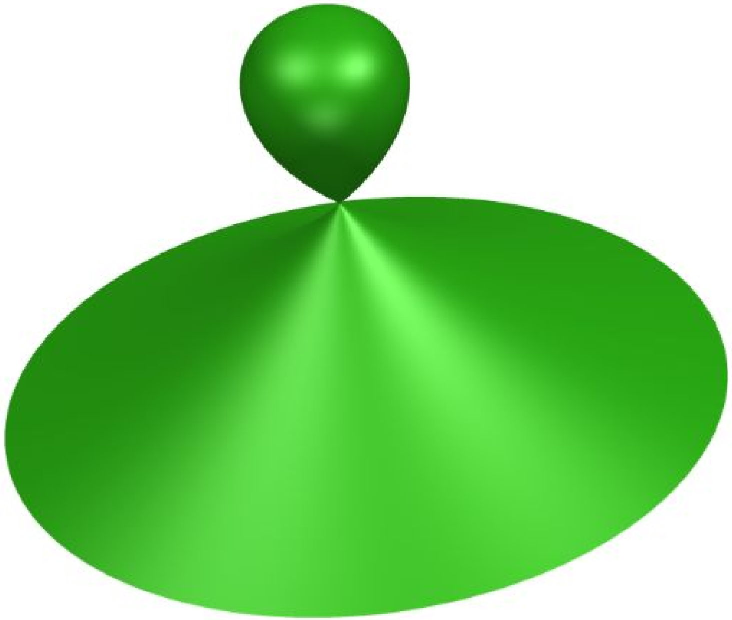


$$x^2 + y^2 - z^3(1 - z) = 0$$

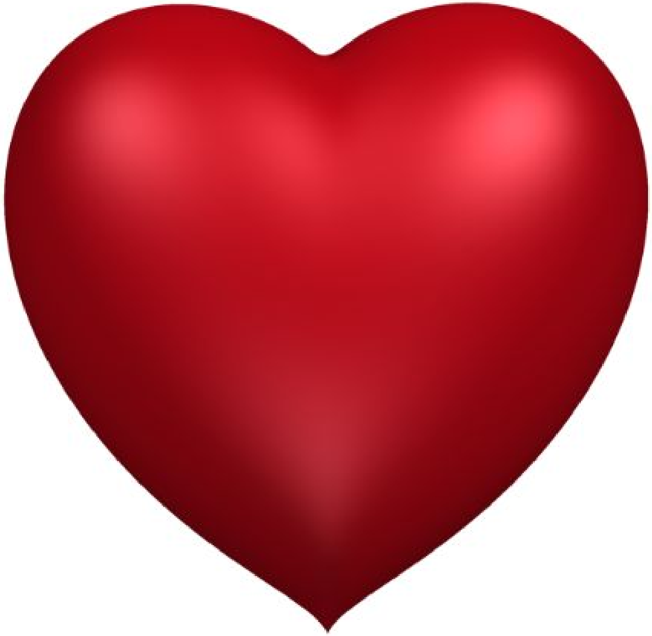


$$1.2x^2 + 1.2z^2 - 5(y + 0.5)^3(0.5 - y)^3 = 0$$

Noen er mer velkjente



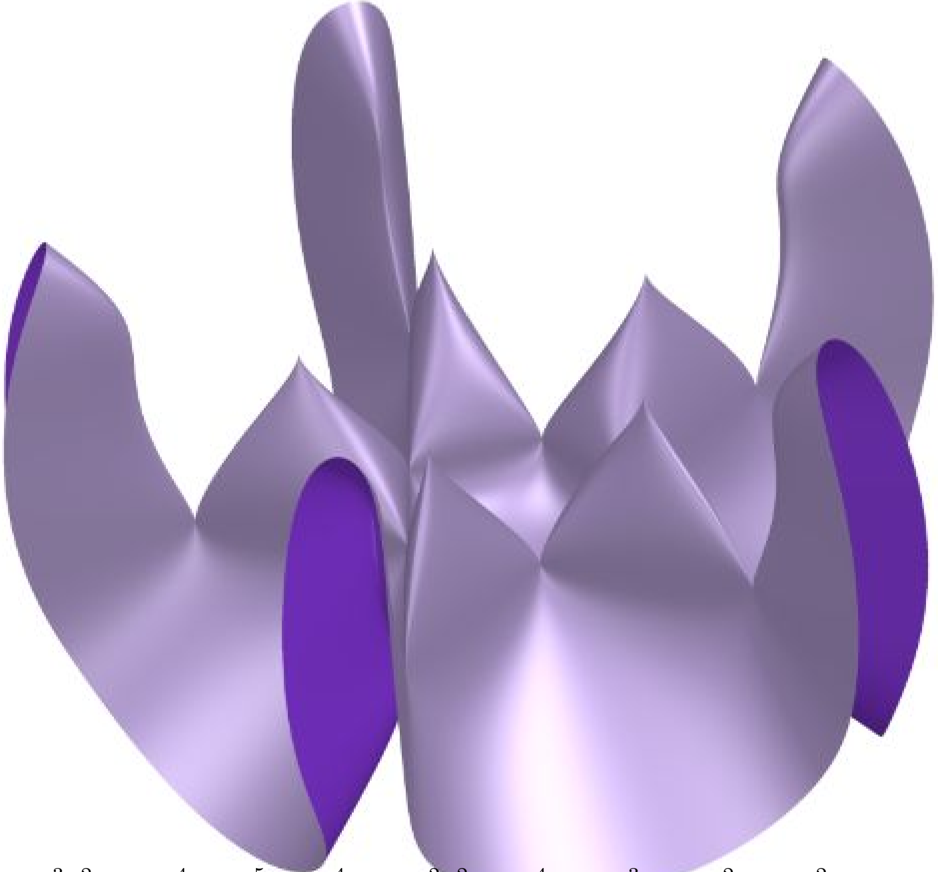
$$x^2 + y^2 + z^3 - z^2 = 0$$



$$(x^2 + 9/4y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - 9/80y^2 z^3 = 0$$

Vi kan ha mange singulariteter

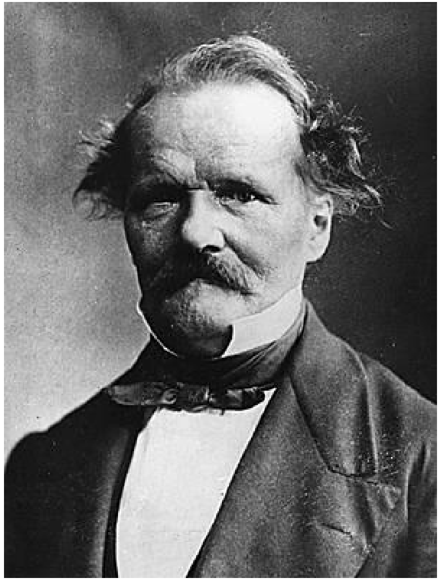
- Til høyre: en veldig symmetriske flate med 15 singulariteter.
- Ser du den regulære femkanten?
- Ble oppdaget i 2005 av **Oliver Labs**.

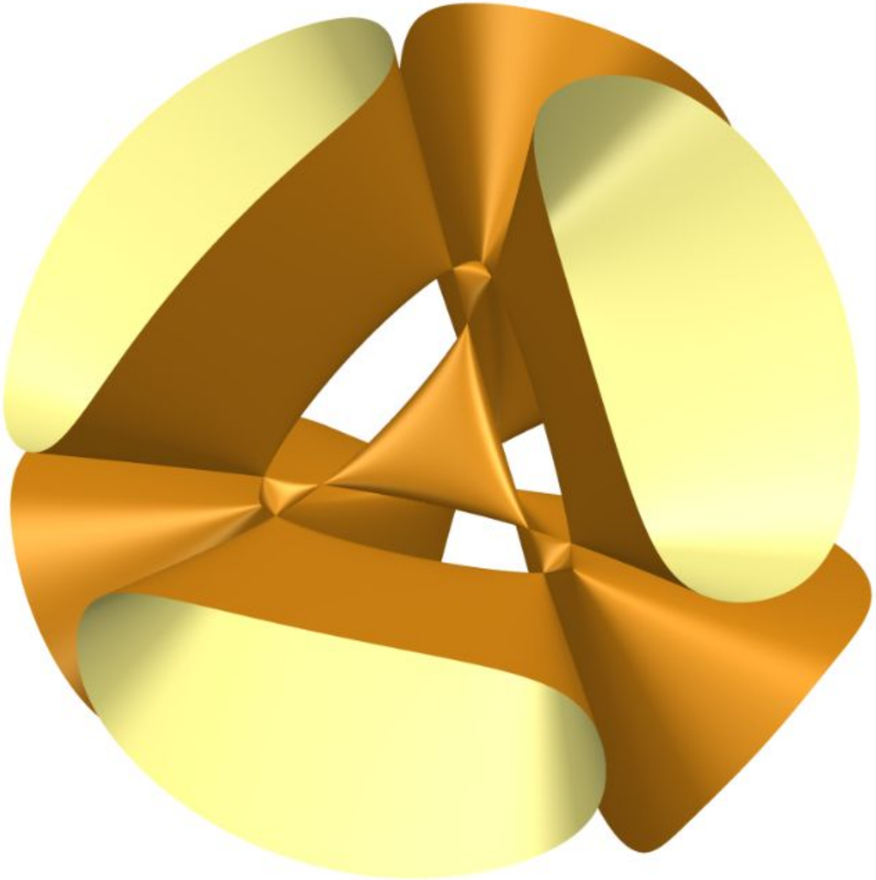


$$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 3z^5 - 5x^4 - 10x^2y^2 - 5y^4 + 10z^3 + 20x^2 + 20y^2 - 15z - 24 = 0$$

Kummer-kvartikken

- Har 16 singulariteter, som er maksimalt antall for kvartikker.
- Oppdaget av Ernst Kummer i 1864.

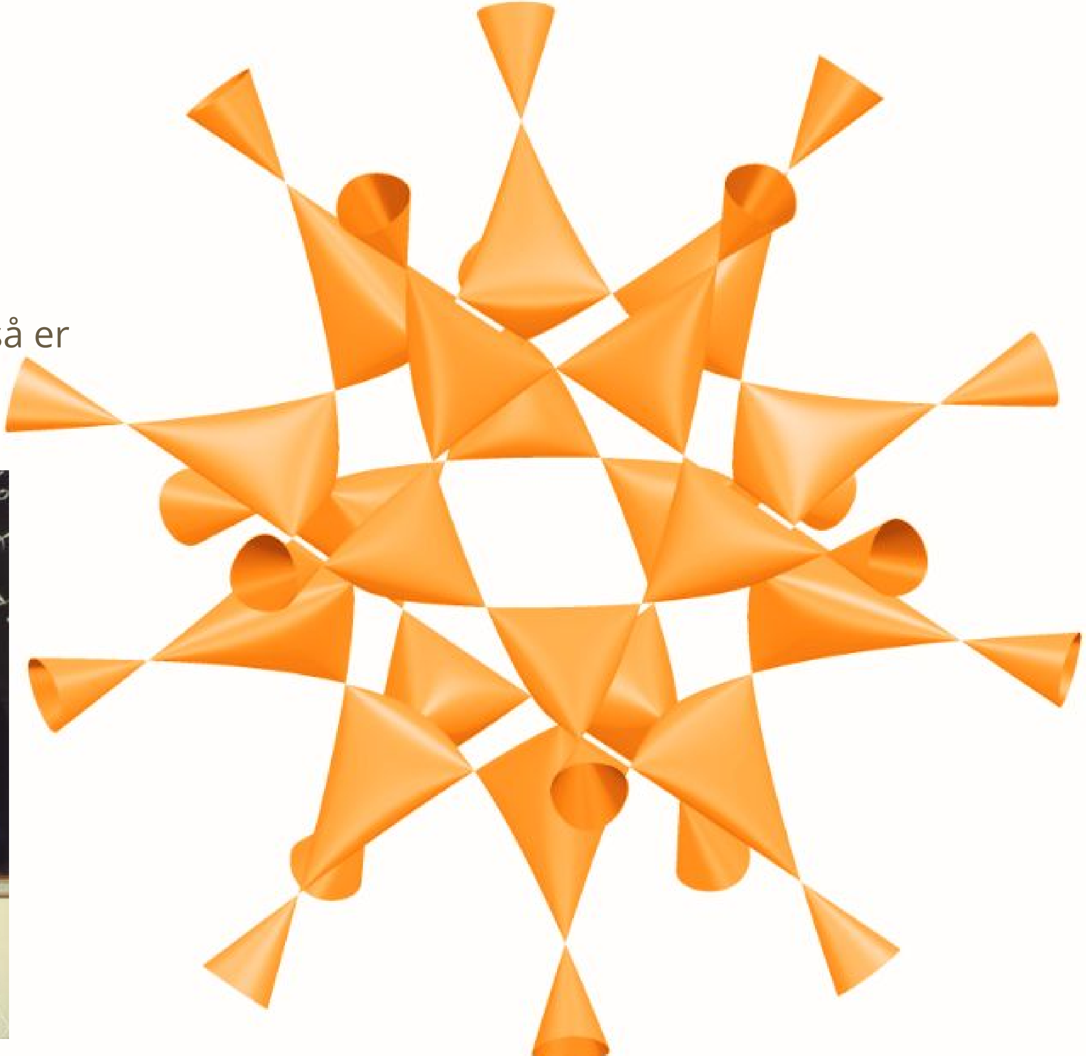




$$(x^2+y^2+z^2-a^2)^2-\lambda(1-z-\sqrt{2}x)(1-z+\sqrt{(2)}x)(1+z+\sqrt{2}y)(1+z-\sqrt{2}y)=0$$

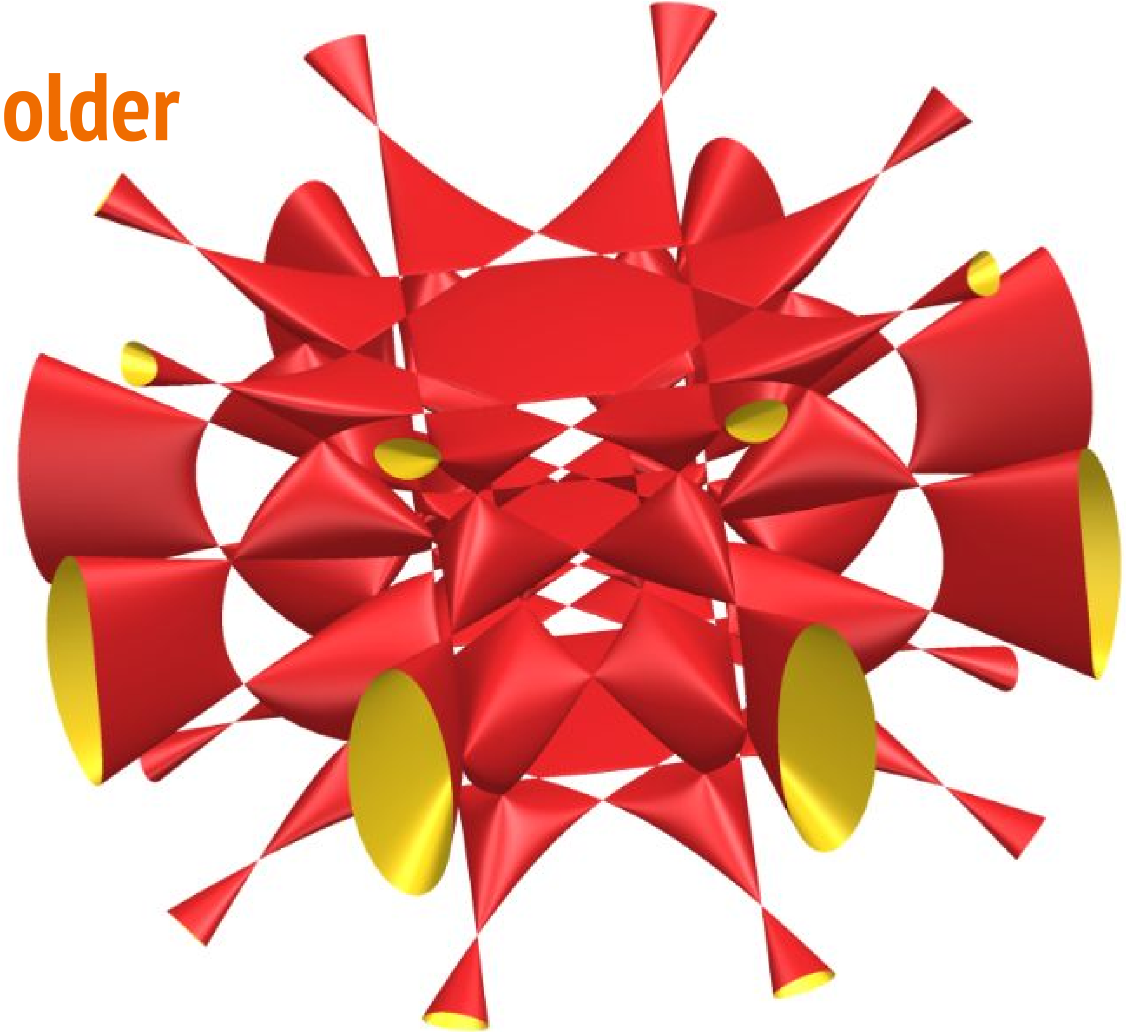
En uslåelig rekord

- Dette er Barth-sekstikken.
- Den har 65 singulariteter, som også er det maksimale antall det er mulig å ha. Oppdaget i 1996.
- Wolf Barth:



Nåværende rekordholder

- Dette er en oktikk. Den
  har 168 singulariteter.
- Oppdaget i 1995.
- Vi vet at oktikker kan
  ha maksimalt 174 singulariteter.
    - Men vet ikke om dette er
      oppnåelig.

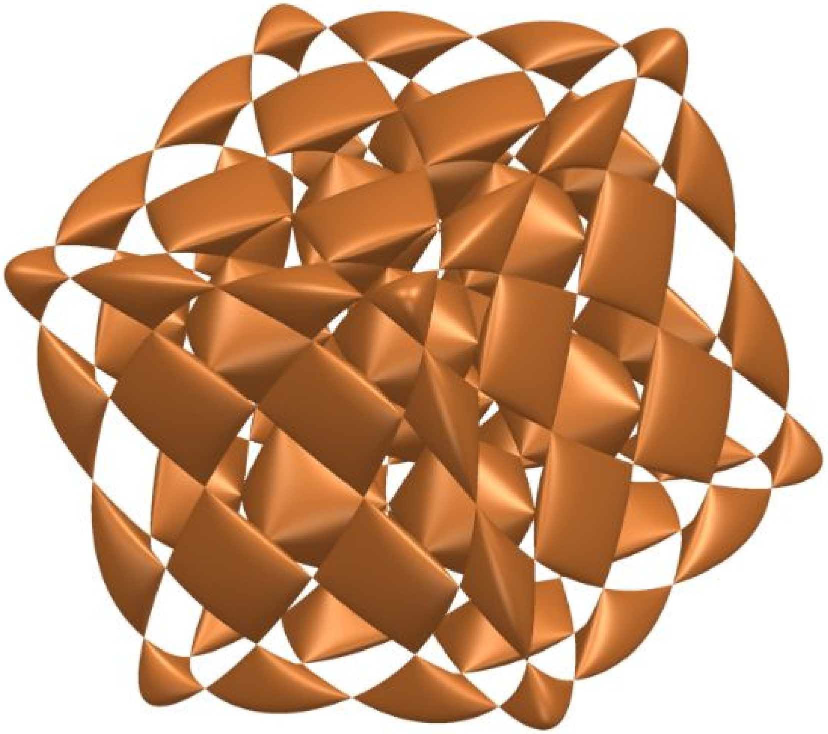


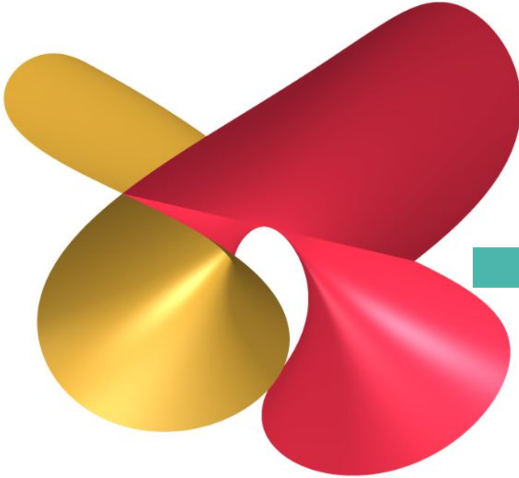
Fremdeles mye vi ikke vet

- Hvor mange singulariteter kan en flate av grad d ha?

- Gitt et polynom, kan vi enkelt regne ut antall “hull”?

- Utregninger av andre invarianter...





Takktakk!

- Sjekk ut @MatematikkFakta på Twitter.
- folk.uio.no/fredrme
- Alle bildene er laget i SURFER, utviklet av Oliver Labs.